Investigación Operativa

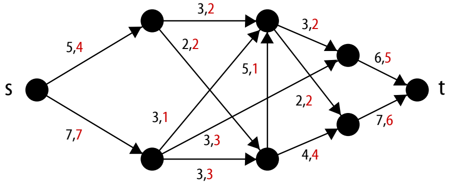
Guillermo Durán

FCEN, UBA / CONICET
gduran@dm.uba.ar

Universidad de Buenos Aires
Octubre 2008

El problema de flujo

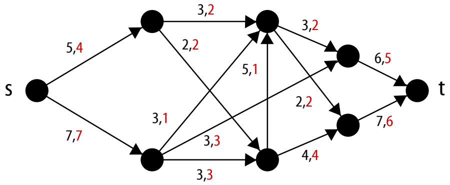
En su versión más simple, se tiene una red orientada con dos vértices distinguidos s y t, llamados fuente y sumidero, y capacidades en cada arco. Un flujo es una función que a cada arco le asigna un valor entre 0 y su capacidad, respetando la ley de conservación (para cada vértice excepto la fuente y el sumidero, el flujo que entra es igual que el que sale). El valor de un flujo es lo que entra al sumidero. Lo que se busca es un flujo de valor máximo.



– capacidades
– flujo
valor del flujo: 11

El problema de flujo

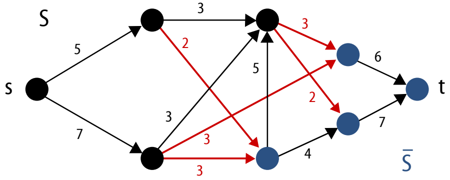
- Más formalmente, tenemos un grafo dirigido $G = (V, E)$, s y t vértices de G, típicamente con $d_{in}(s) = 0$ y $d_{out}(t) = 0$ y una función de capacidad $c : E \to \mathbb{R}_{\geq 0}$ ó $\mathbb{N}_0$.
- Un flujo en G es una función $f : E \to \mathbb{R}_{\geq 0}$ tal que para cada $e \in E$, $f(e) \leq c(e)$ y además, para cada $v \in V \setminus \{s, t\}$, $\sum_{w:wv \in E} f(wv) = \sum_{z:vz \in E} f(vz)$ (ley de conservación).
- El valor de un flujo es $\sum_{v:vt \in E} f(vt)$, que es igual a $\sum_{v:sv \in E} f(sv)$. Lo que se busca es un flujo de valor máximo.



– capacidades
– flujo
valor del flujo: 11

El problema de corte

- Un corte en la red es una partición de los vértices en dos conjuntos, S y $\overline{S}$ de modo que $s \in S$, $t \in \overline{S}$.
- Los arcos del corte son los que van de S a $\overline{S}$ (o sea, $vw \in E$ con $v \in S$ y $w \in \overline{S}$).
- El valor del corte es la suma de las capacidades de sus arcos. Lo que se busca es un corte de valor mínimo.



– aristas del corte
valor del corte: 13

Variantes

Algunas variantes del problema de flujo:

- flujo en redes con arcos no dirigidos
- flujo factible, máximo o mínimo con cotas inferiores y superiores
- capacidades en los vértices
- flujo máximo con costo mínimo o acotado:
  - el costo es proporcional al flujo transportado a través del arco (fácil)
  - el costo es fijo y se cobra por el uso del arco (difícil)
- múltiples orígenes y destinos

Aplicaciones

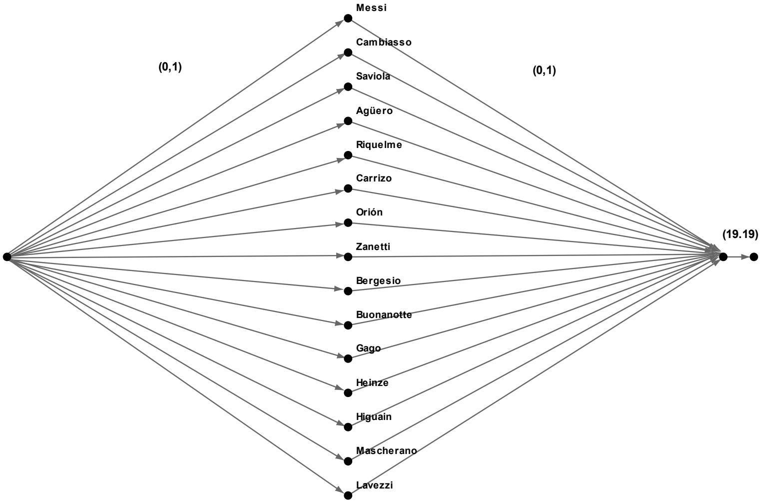
El problema de flujo máximo se puede usar para modelar problemas de:

- transporte de mercadería (logística)
- flujo de gases y líquidos por tuberías
- flujo de componentes o piezas en líneas de montaje
- flujo de corriente en redes eléctricas
- flujo de paquetes de información en redes de comunicaciones
- tráfico ferroviario, etc.

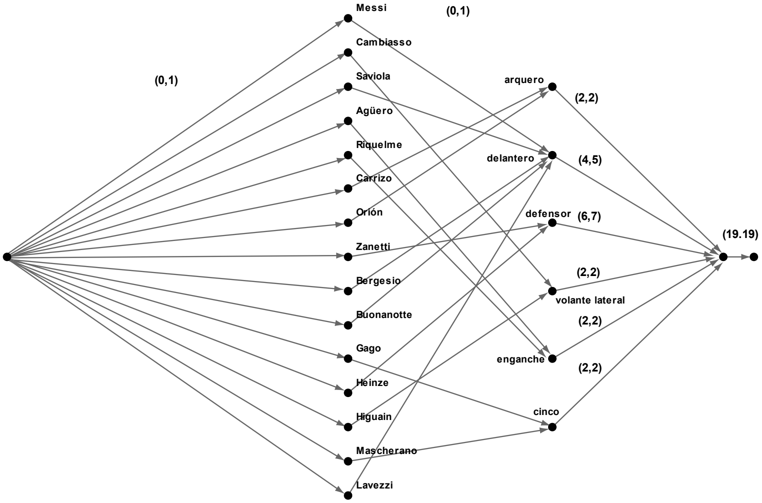
Ejemplo

Maradona fue designado DT de Argentina y quiere armar la nueva selección de fútbol. Para eso escribió una lista con sus 40 jugadores favoritos, de los cuales debe elegir los 19 convocados para el próximo encuentro. Necesita 2 arqueros, entre 4 y 5 delanteros, entre 6 y 7 defensores, 2 volantes laterales, 2 enganches y 2 cincos. Por otra parte, los clubes no están dispuestos a ceder a la selección más de dos jugadores. Modelar el problema del Diego como un problema de flujo.

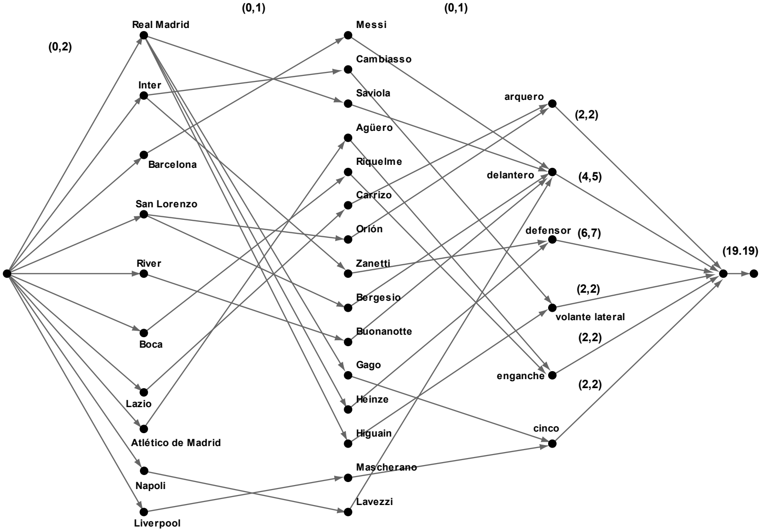
Primer aproximación... elegir 19 jugadores



Agregamos las posiciones



Agregamos las restricciones de los clubes

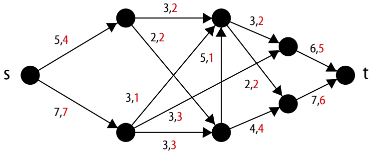


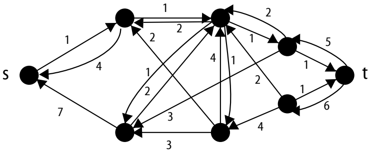
Algoritmo de Ford y Fulkerson (1956)

Dada una red $G = (V, E)$ con capacidades en los arcos c y un flujo f, se define el grafo residual $G' = (V, E')$ con los mismos vértices que G y tal que:

- Si $ij \in E$ y $f(ij) < c(ij)$ entonces $ij \in E'$ con capacidad $c'(ij) = c(ij) - f(ij)$
- Si $ij \in E$ y $f(ij) > 0$ entonces $ji \in E'$ con capacidad $c'(ji) = f(ij)$.

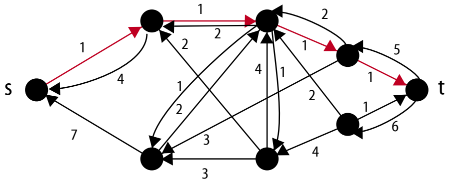
Ej:





Algoritmo de Ford y Fulkerson (1956)

Un camino de aumento es un camino dirigido de s a t en el grafo residual.
Ej:



La capacidad del camino de aumento es el mínimo de las capacidades de sus arcos.

Algoritmo de Ford y Fulkerson (1956)

$f(ij) = 0$ para todo $ij \in E(G)$;

T = falso;

Mientras $\neg T$

construir el grafo residual G' de la red en base a f;

buscar un camino de aumento en G';

Si existe camino de aumento

  c = capacidad del camino;

  Para cada arco ij del camino

    Si $ij \in E(G)$ y $f(ij) \leq c(ij) - c$

      $f(ij) = f(ij) + c$

    Si no (en ese caso, notar que $ji \in E(G)$ y $f(ji) \geq c$)

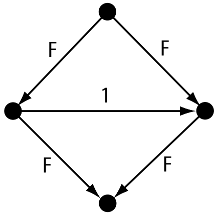
      $f(ji) = f(ji) - c$

Si no

  T = verdadero;

La complejidad del algoritmo de caminos de aumento puede ser muy mala, si tenemos "mala suerte" al elegir los caminos.... puede ser del orden de la capacidad máxima, la cual puede ser exponencial en el tamaño de la entrada (si las capacidades son enteras! si no, podría incluso no terminar).

Ej:



Modificación de Edmonds y Karp (1972)

- La modificación propuesta consiste en elegir el camino de aumento utilizando BFS (o sea, elegir un camino mínimo en cantidad de aristas entre s y t, en lugar de uno arbitrario).
- Con esta modificación, se puede demostrar que el algoritmo ahora tiene complejidad $O(nm^2)$.

Propiedad de integralidad

Si las capacidades de los arcos son enteras, entonces el valor del flujo máximo es entero y además, existe un flujo máximo cuyo valor en cada arco es entero.

Demo: Por inducción utilizando el algoritmo de caminos de aumento. □

Teorema (Ford y Fulkerson, 1962)

Sea G un grafo dirigido con capacidades en lo arcos y s y t vértices de G. Entonces el valor del flujo máximo entre s y t coincide con el valor de un corte mínimo $(S, \overline{S})$ tal que $s \in S$ y $t \in \overline{S}$.

Demo: Es fácil ver que el valor de un flujo máximo $\varphi_{\text{máx}}$ no puede superar el valor de un corte mínimo $\nu_{\text{mín}}$, porque el flujo que pasa de s a t tiene que pasar de S a $\overline{S}$ (de hecho, el valor de f dado un corte se puede calcular como la suma del flujo de S a $\overline{S}$ menos la suma del flujo de $\overline{S}$ a S, que es no negativa). Entonces $\varphi_{\text{máx}} \leq \nu_{\text{mín}}$.

Por otra parte, al terminar el algoritmo determina un corte $(S, \overline{S})$ y un flujo f tal que los arcos del corte están saturados y los arcos de $\overline{S}$ a S tienen flujo cero (S son los vértices alcanzables desde s en G' y $\overline{S}$ el resto). Por lo tanto $\varphi_{\text{máx}} \geq \varphi_f = \nu_{(S,\overline{S})} \geq \nu_{\text{mín}}$. Luego $\varphi_{\text{máx}} = \nu_{\text{mín}}$, y esto demuestra también que el algoritmo obtiene un flujo máximo. $\square$